

算数・数学の授業を通して得られる4つの力の育成 —数学的な思考力・数学的な表現力・数学的な判断力・数学的な活用力—

大阪教育大学附属池田中学校 数学科 中西遼・砂田謙佑・谷直樹

1. 主題設定の理由

(1) 算数・数学部における課題

算数・数学部では、各種学力調査でも言われているように、現代の子どもたちの課題として次の三点であると考えた。まず、算数・数学に関する基礎的な知識や技能が身につけていないことである。次に、知識や技能はおおむね理解でき、身につけていたとしても、それらの力を用いて、考え、判断する力や表現する力が備わっていないことである。最後に、算数・数学で学習したことが、将来どのような場面において必要なのか、どのようなことに役立つかについて、児童生徒がわからず、学習を進めている点である。これらの課題を解決するために、我々は、授業を通して、児童生徒に問題を解決したり、その根拠について数学的な表現を用いて筋道立てて考えたり論理的に説明し合ったりできるということを身につけさせさせていかなければいけない。

(2) 算数・数学部における「知」とは

算数・数学部では、12年間を通して、算数・数学で学習したことや方法を用いて、新たな学習場面や現実社会において、発生した問題を見つけ、自らの力で解決しようとする態度を育成することが大切であると考えた。そのためには、主体的な学びが必要である。算数・数学部で考えた主体的な学びとは、児童生徒一人ひとりが目的意識をもって取り組み、算数・数学にかかわりのある様々な活動を通して、数学的な価値に気づき、獲得していく姿である。そして、主体的な学びの中で、獲得できる力として、特に、数学的な思考力・数学的な表現力・数学的な判断力・数学的な活用力の4つの力を挙げることにした。4つの力は、それ

ぞれが独立したものではなく、つながりをもって、絡み合っているものである。この4つの力を日々の授業の中で高めるために、問題を解決したり、その根拠について数学的な表現を用いて、筋道立てて考えたり、論理的に説明し合ったりすることが必要不可欠であると考えた。

(3) 4つの力の階層性・系統性・連続性

4つの力について、以下の表にまとめた。

4つの力

(池田キャンパス小中高 算数・数学部)

数学的な思考力	一人ひとりが課題解決の方法について、根拠や理由を明確にし、筋道立てて考える力
数学的な表現力	言葉や数、式、図、表、グラフなどを用いて自らの考えを表す力
数学的な判断力	論理的に考えることによって、事象や性質を正しく認識し、解釈し、見極める力
数学的な活用力	生活場面・学習場面（他教科やこれから先の算数・数学）において、既習内容を用いて、問題を解決する力

まず、数学的な思考力である。数学的な思考力といった場合、どの校種においても、「根拠や理由を明確にし」「筋道立てて考える」というキーワードが入ってくる。なぜ、そうなるのかということ筋道立てて考えるためには、演繹的な考え方・帰納的な考え方・類推的な考え方などを用いて考え、発達段階に応じて、系統的に指導していく必要がある。そのために、小学校段階では、

結果・根拠・理由を明確にすることを重点的に指導し、中学校以降は、論証などを用いて考えることが中心になる。

数学的な表現力は、数学的な思考力と表裏一体とよく言われる。簡潔で的確に一般的な表現にしようとするほど、考えが深くなる。つまり、思考したことを各種数学的な表現を用いて表現するだけでなく、他者を説得するために、自らの考えをまとめることで数学的な思考力が高まるからだ。ただ、発達段階に応じて、用いる数学的な表現は異なる。図形領域において、小学校では具体物（色紙や色板、立体模型など）を操作することで図形に対する概念を学んでいく。操作的表現から図的表現、言語的表現、記号的表現など抽象度を増していく。中学校では、小学校で経験的に理解したことをより論理的に理解し、考えるように進めていく。すなわち、根拠を明確に立証するということになり、論証（証明）という概念が生まれてくる。操作的表現図的表現も必要な場面もあるが、言語的表現、記号的表現が中心になる。高等学校では、数の組で表された座標や位置ベクトルを活用し、感覚的・抽象的な概念として図形が認識できることを学ぶ。言語的表現、記号的表現などの抽象的な表現が中心となる。

数学的な判断力とは、思考の過程で既習事項を用いて、認識し、解釈し、見極める力である。この力は、授業中、一人ひとり個人で高めることもできるが、様々な考えを出し合い、お互いに学び合うことで数学的な判断力をより効果的に高め合うことができる。よって、小学校段階においては、一人ひとりの考えを出し合い、みんなでよりよい数学的な判断力をつける場を設定する。状況に応じて、ペアやグループで話し合う時間を設けることもある。その後、問題としっかりと向き合い、一人ひとりが数学的な判断力を用いて解決していくなど、発達段階に応じて、場を設定していく必要がある。

最後に、数学的な活用力とは、学習や生活の中で、算数・数学で学習した内容・考え方を用いていく力である。算数・数学の時間で学習した内容・考え方は、算数・数学の時間しか役立たないと言われることがある。そうではなく、普段の生活の中で活かしていく、活かしていかなければいけないものである。また、この力が身につくことで学習したことが、より意味あるものに価値づけられ、算数・数学のよさが実感を伴って味わうことができるようになる。このように算数・数学のよさが感じられるものでなければならない。小学校段階では、買い物場面などのより身近な生活場面や社会科や総合的な学習の時間などでのグラフの読み取りなどの場面において、直接的に学習したことを学習や生活に活かすことができるように指導する。そして、学年が上がるにしたがって、現実事象の中から自らで算数的・数学的な対象を選び出し、既習事項を用いて解決していくことができるような力をつける必要がある。

(4)小中高12年間の算数・数学の学習

- 4つの力の育成に焦点を当てて -

教材研究や指導案づくりの時から、4つの力を意識し、授業や単元を組み立てていくことにする。具体的には、各授業において、4つの力のうち、どの力に焦点を当てて、その力をつけるためには、どのような手立てがしているのかを考えていくことにした。また、単元を通して、4つの力をどのように育成していくのかを考え、指導案の中に提示していくことにした。今回の研究授業について、小学校の「資料の調べ方」、中学校の「相似な図形」、高等学校の「地球上の2地点間の距離」の単元で行う。これらの授業の中で、また、単元の中で、4つの力が育成していくことができているか、手立てが効果的であったかどうかなどを検証していく。今後は、12年間で、4つの力を育成できるカリキュラムを作成することを目的に共同研究を行っていく。

2. 本年度の取り組み ～数学的な思考力・活用力を伸ばす授業づくり～

(1) 実践事例Ⅰ 相似な図形 ～立って見える図形の不思議～

①はじめに

広告や標識など、身近なところにも相似が使われていることを知り、その不思議な構造について考えることで相似についての理解を深めたい。生徒たちは、基本的な知識理解や技能の面では多くの生徒が習熟し、問題の中で活用することについても意欲的な生徒が多い。しかし、日常生活の中に数学が活用されていることを実感できている生徒は非常に少ないのが現状である。

本時は、生徒にとって一度は見たことのある“だまし絵”を採用する。相似を中心とした既習事項を用いながら、立って見える図形の仕組みについて考えることで、相似の概念をひろげたり、理解を深めたりして、「数学的に深く追求することの楽しさや面白さ」を味あわせたいと考えている。

②ねらい

相似を中心とした既習事項を根拠として、図形の性質を考察し、その仕組み(かき方)を説明することができる

③授業の実際 (全3時間)

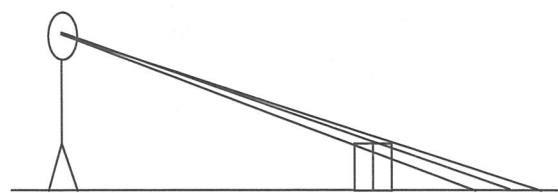
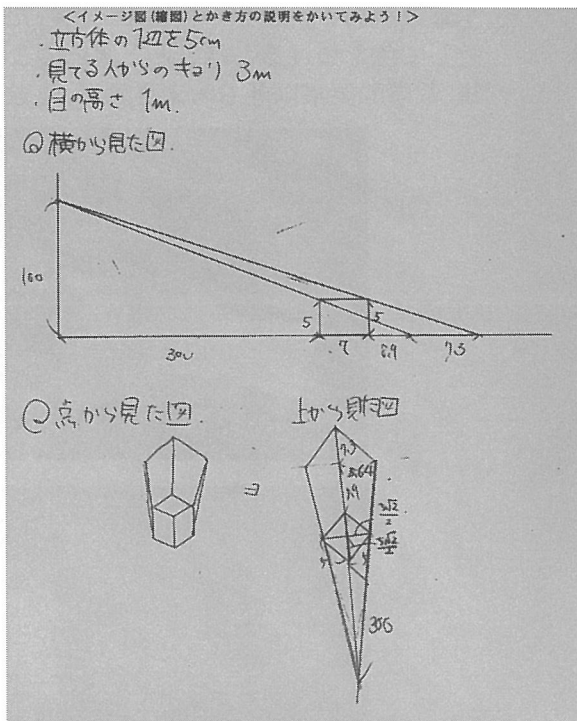
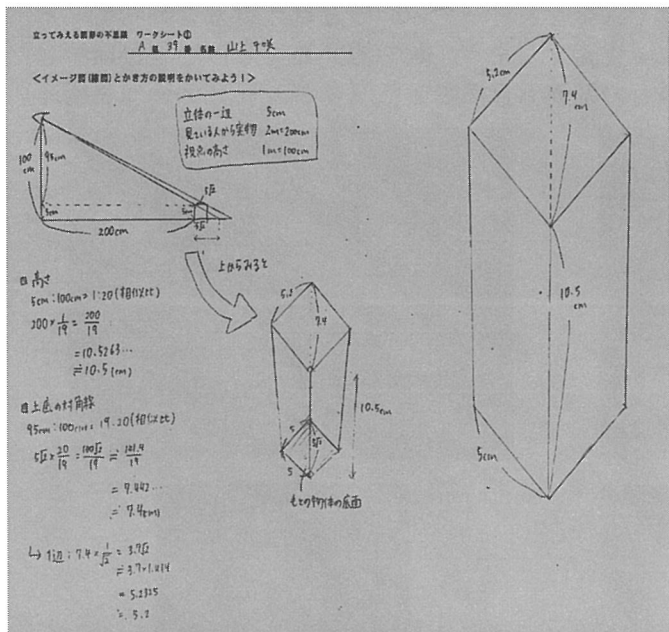
1時間目 『だまし絵のかき方を解明しよう!』

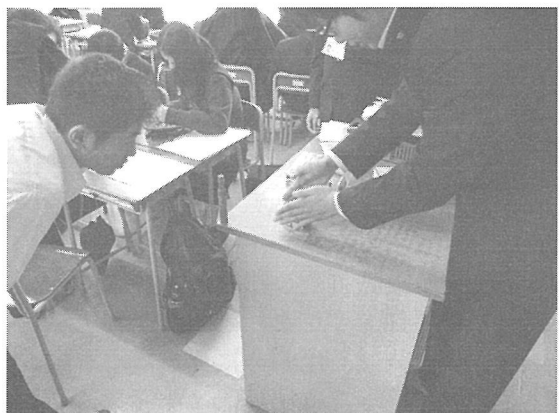
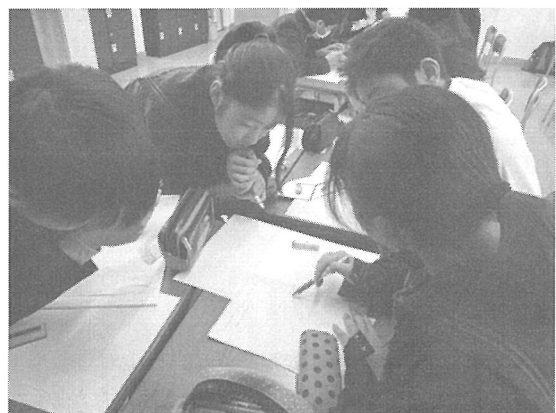
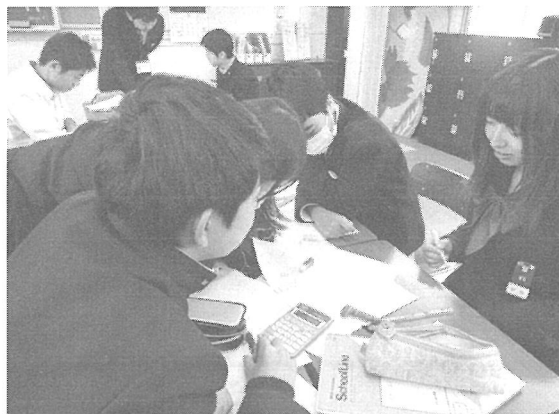
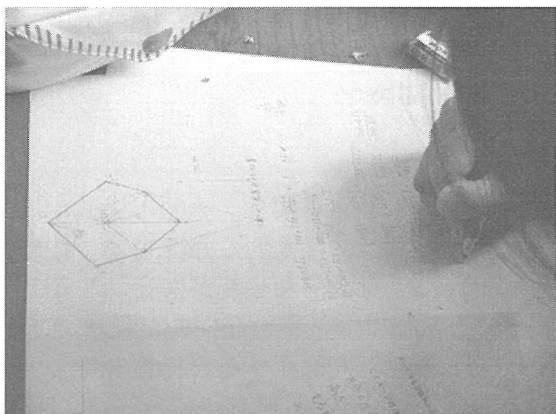
生徒は、はじめに見るだまし絵の映像に衝撃を受ける。「なぜ平面にかいた絵が立って(立体に)みえるのだろうか」そんな問いから授業はスタートする。ものの見え方なので、角度・光・影に関係しているのだが、描かなければならない図形は影の形になっているということが気付けるかどうか大きなポイントとなる。実はそこに相似な図形、数学が潜んでいる。

2時間目 ワークシート(設計図)の完成

引き続き、1時間目の続きで、設計図(ワークシート)の完成を目指す。

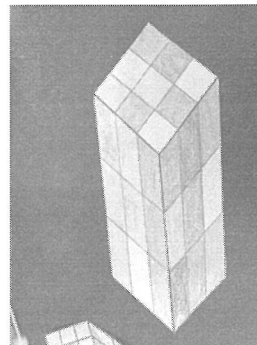
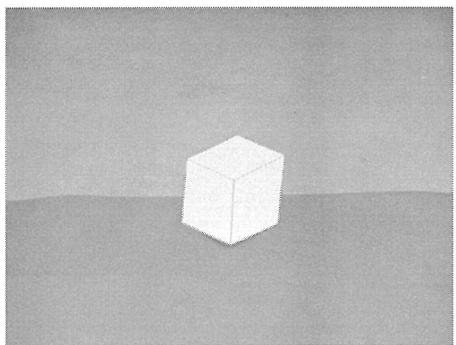
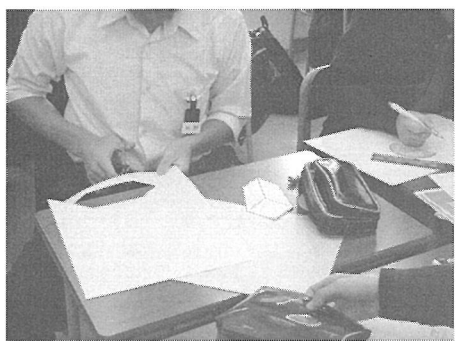
以下は、生徒のワークシートの例である。





3 時間目 『だまし絵をつくってみよう！』

謎が数学的な根拠をもとに解明され、設計図が完成されると、次は実際の“だまし絵”の制作にはいる。画用紙を使い、骨組みが完成するのだが、実はそれだけではなぜか“立っている”ようには見えづらい。なぜだろう・・・と生徒たちは考え込むが、そこで実際のものの見え方と比較させていく。実際には、光と影、つまり色の濃淡があり、実物の後ろには必ず背景がある。紙を一枚後ろに挟むだけで、全くと言っていいほど見え方は変わってくる。そして色をつけるとほとんど実物のように見えてしまう。数学的要素をしっかりと理解した後、数学的要素以外も考えさせて、他教科との関連も意識させた。(今年度研究テーマと関連)

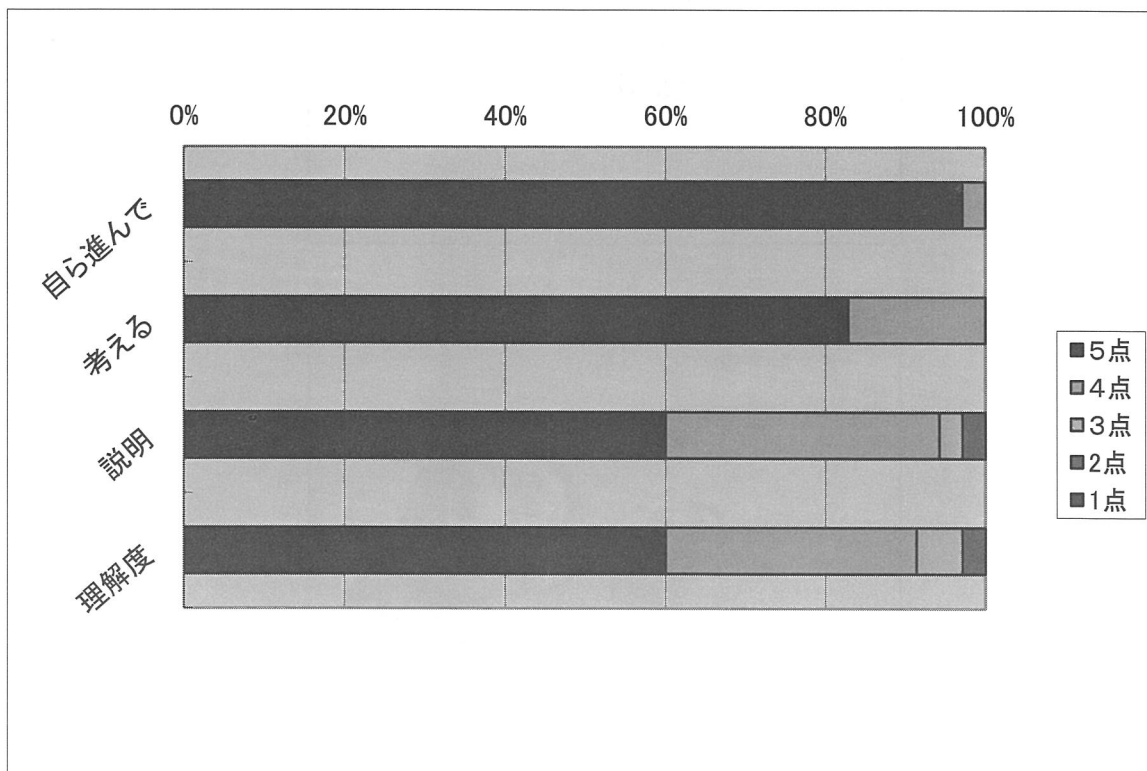


④生徒の主な感想

発見したこと・分かったこと
既習事項を使うと立って見える図形が作れる。
平面の図形が書き方によっては立っているように見える。
光や目の角度を図で表せば、平面を立体に見せることができる。
上から見た図と、横から見た図を書けばよい。
平面が立体的に見えるには角度と距離も大切だと感じた。
相似を身近につかえるのを改めて知った。
相似を使うと縮図が簡単にかける。
相似を使えば様々な図形をかくことができる。
立体に見える図形が相似を使ってかけることが分かった。
図形を2つ書いて相似を使うと、幅や長さが分かる。
目の錯覚は相似などで証明できることがわかった。
相似を使い、ただ書くだけでは手本のように浮かび上がっては見えないことが分かった。
影は遠くなるほど広がり、相似の関係になっている。
相似を使うことにより影もあたる部分の大きさを出せる。
影の広がりを紙の広がり重ねるとということが分かった。
コンピュータでつくったものと私がつくったものは上の面と下の面の長さがあまりかわらなかった。
数学的な要素と美術的な要素の2つが入り混じってできるものだと実感した。
色（影も含む）をつけることでより見やすいことが分かった。

<自己評価> (5点満点)

- ・今回の課題に自ら進んで取り組みましたか。
- ・しっかりと考えることができましたか。
- ・自らの考えを根拠をもって説明できましたか。
- ・今回の課題のあなたの理解度は？



(2) 実践事例Ⅱ 相似な図形を描こう

①主題設定の理由

図を拡大縮小したりすることは、日常的によくみられる。例えば、様々な縮尺の地図、コピーする際の原稿の拡大・縮小などである。また近年、iPadをはじめとするタブレット型端末の登場により、指先だけで簡単に文字やイラスト、画像を拡大・縮小したり、画面の表示倍率を変更したりといった経験を持っている生徒がほとんどであろう。それ故に、「図を拡大・縮小させる方法」の原理の実感と経験が薄れているのではないだろうか。

「図を拡大・縮小させる方法」として相似の中心を用いた方法を学習しているが、教科書では三角形・四角形や円など、単純な図形にとどまっている。相似の中心と各頂点との距離を一定倍ずつし、つなぎ合わせることで拡大・縮小する方法である。拡大・縮小の原理ではあるが、この方法では多角形に有効でも、曲線を含む図形を描くことは難しい。また、生徒たちも「三角形や四角形を拡大・縮小させる方法」としての認識に過ぎず、「図を拡大・縮小させる方法」自体を獲得したという実感は得られていないと考えられる。

そこで、身近な道具を使い、身近なキャラクターを拡大させる方法を探ることで、数学への興味・関心を高めるとともに、相似の原理を改めて考え、既習範囲から得た“知識”を活用させたいと考えた。

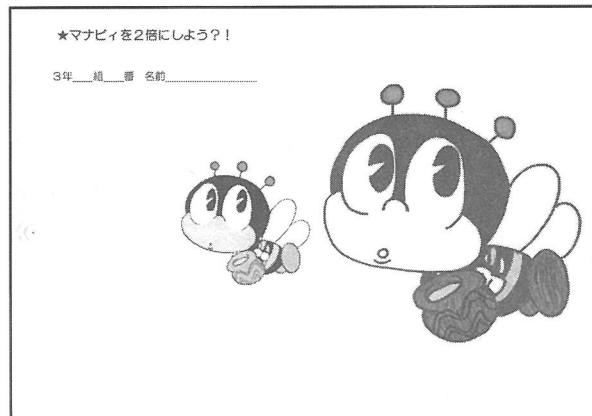
②実践例

題 材	相似な図形の性質
目 標	既習事項をもとに、身近な道具を活用して図形を拡大させる方法を考える。 実際に描くことができる。
準 備 物	教科書、ノート、ワークシート、定規(30cm)、画びょう、輪ゴム

《ワークシート》



《見本》

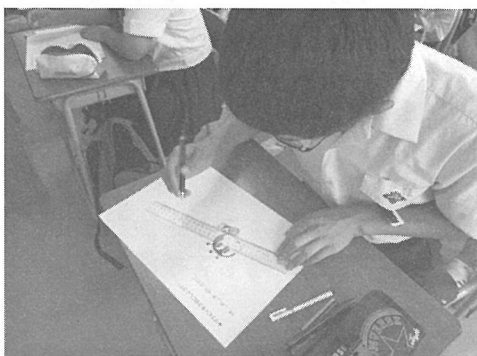


展 開

主な学習活動	指導上の留意点	評価の観点
<ul style="list-style-type: none"> ○本時の活動内容を知る ・完成図から、どのような課題なのかを考える。 ・本時の課題を知る。 	<ul style="list-style-type: none"> ・完成図を示し、2つの図（イラスト）がどのような関係になっているのか考えさせる。 	<ul style="list-style-type: none"> ・積極的に発言している
<p>マナビィを、2倍に拡大させる方法を考えよう！！</p>		
<ul style="list-style-type: none"> ○拡大方法を考える ・説明を聞く。 ・個人で取り組む。 ・4人班ごとで取り組む。 ・相似の中心を用いた拡大図のかき方から、適切な道具やそれぞれの使い方を考えていく。 ・方法がわかったら、実際に描いてみて確かめる。 ○考えを発表する ・実際に前で描き、その方法を説明する。 ○まとめ ・多角形でも、イラストでも、拡大（・縮小）の原理は同じであることを確認する。 	<ul style="list-style-type: none"> ・取り組み方を説明する。 ①使用可能な道具は3種類 定規(30cm)・画びょう・輪ゴム どれを使用しても良いし、使用しないものもあるかもしれない。 ②全体に向けての発表をするので、説明も考えながら進める。 ・個人で考えさせる。 ・机間指導を行いながら、班活動へと移行させていく。 ・適宜、ヒントを示していく。 《ヒント》 ①図を拡大するときにはどのような方法があった？⇒相似の中心 ②曲線が難しい⇒距離が変わっていく ③2倍に拡大ということは⇒輪ゴムを2本 ・もし描いていない場合は描くように促す。うまく描けない場合は、アドバイスをする。 ・前で発表させる。 書画カメラを使い、実演・説明させる。このとき、考え方や根拠も示しながら進めることに注意させる。 ・多角形でも、イラストでも、拡大（・縮小）の原理は同じであることを確認させる。 	<ul style="list-style-type: none"> ・きちんと指示を聞き、課題を把握できている ・進んで課題に取り組んでいる ・根拠となる既習の知識を活用しながら、考えられている ・実際に描けている ・適切な用語や考え方ができている ・拡大・縮小の原理を再認識する

《授業風景》

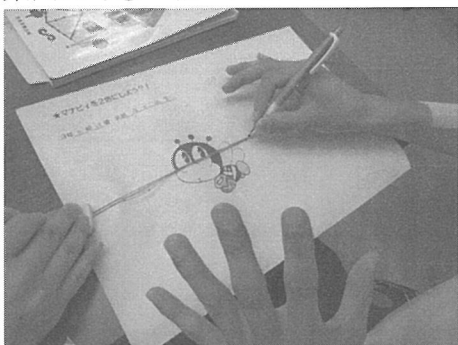
個人思考・定規で点をとる方法からはじめています。



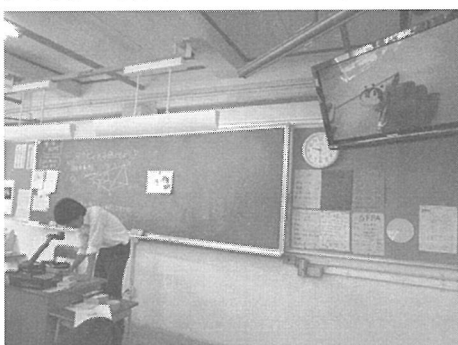
集団思考①・試しに輪ゴムを使っています。



集団思考②・輪ゴム2つ繋げることに気がきました。



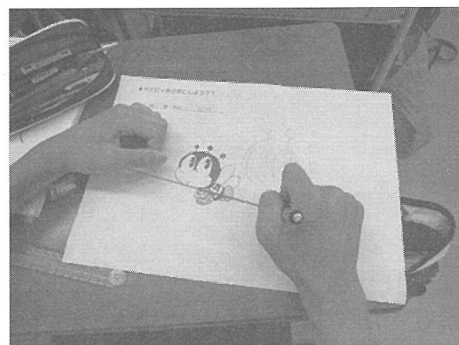
発表②・書画カメラを使い、画面で表示します。



発表①・実演しながら説明してもらいます。



作成・他の生徒も描いていきます。



《感想》

感想
 輪ゴムを使って絵を描くのはかなり難しかった。
 3倍の拡大図などでも試してみたい。

今日の感想
 1人1人思いつかなくて悩んだことでも、4人いると
 やり方が分かったのがよかったです。
 マーカーは角がなくてめんどくさい感じがしました。
 家で、ドラゴンも描いてみるかな... (笑)
 完成が楽しかったです。

☆感想
 はじめは、どうやって書けばいいのか全く分からなくて。
 イライラしてけど、分かったときはスッキリしました。
 身近なもの、定規なども使わずに相似形を
 書けるんだと驚きました。

感想
 マーカーを使うゲームのようだったか
 授業で習っている相似とつながっていて
 楽しかった。

3. 成果と課題

算数・数学を通して獲得させたい力として、数学的な思考力・判断力・表現力・活用力の4つの力が必要であると算数・数学科は考えた。その中で、特に、1年次は、数学的な思考力・活用力に焦点をあて、小・中・高それぞれで授業を行った。中学校の「相似な図形～立って見える図形の不思議～」では、一見すると数学とは何の関わりもなさそうなものの中にも、ちゃんと数学的な視点をもって見れば、実は数学が潜んでいるのだという驚きを体験させ、実生活の中で数学を活かして課題を解決しようとする態度・力と活用力を伸ばすことを目的として「だまし絵」の題材を扱った。また、「相似な図形を描こう」の実践では、相似の原理に改めて立ち返ることで、より発展的な内容を解決できることを実感させ、既習範囲から得た“知識”を活用する力を伸ばす授業を行った。

2年次以降は、4つの力を伸ばすことに加え、現実社会の中で数学を活かして課題を解決しようとする態度・力もさらに身につけさせていかなければならない。(1年次も扱ったが、この力はまだまだ弱いように思う)それが本当に、真の数学知や我々が本当に獲得させたい「生きる力」に繋がっていくと考える。

2年次以降は、指導法・授業展開案の提案も視野に入れ、統一領域・単元で行うことを検討する。また、同じ領域を扱うことで、小・中・高と進むにつれて、児童・生徒の成長段階も客観的に見られるのではないかと考えている。