自立し協同する力を育む算数・数学科教育
～図形の見方を深める～

数学科　谷直樹・砂田謙佑・中西

１．主題設定の理由

(1) 算数・数学科における「自立」と「協同」

算数・数学における「自立」している姿とは、ある課題に対して、自分の考えを持ち、その考えの正誤をきちんと分別しそれをもとに自己を修正していこうとする姿ととらえている。また、「協同」している姿とは、授業の話し合いなどの場面をおいて、自分の考えと他者の考えを比較したり、関連づけたり、価値づけたりすることによって、より洗練された説明することでき、理解や考えを高め、深めることができる児童生徒の姿ととらえている。そして、算数・数学部では、この力をつけるためには、授業の中で言語活動の充実が必要不可欠であると考えた。算数・数学における言語活動とは、言葉や数、式、図、表、グラフなどの各種数学的表現を用いて、問題の解決過程における考え方や処理の仕方や結果を分かりやすく表したり、説明したりする活動である。つまり、自分の考えを、筋道を立てて説明したり、論理的に考えたりして、自ら納得したり他者を説得させたりする活動が大切になってくる。

また、今年度は、図形領域に絞って、考えていくことにした。その理由として、図形領域は、得意な子どもは対象の図形をイメージできるが、苦手な子どもはイメージできないとはっきりしており、１２年間を考え上で、系統的に指導していく必要があること、言葉や図や式などの各種数学的な表現を用いて、また、それらを関連付けて学習を進める必要があることが挙げられることから、「図形の見方を深める」というテーマを設定した。

以上のことをふまえ、図形領域において授協同する力を育むことをめざすことにした。研究方法として、各校種において、学習指導要領で定められた図形領域を分析し、言語活動のマトリクスを作成し、図形の見方を深めるために図形領域の系統性を再構築していくことにした。

(2) 図形領域における言語活動マトリクス

図形領域において、小学校では具体物（色紙や色板、立体模型など）を操作することで図形に対する概念を学び、それに対する操作を体験的に学習する。例えば、立体の展開図やいろいろな図形を正確に描くことや立体を正確に作ることが求められる。中学校では、小学校で経験的に理解したことをより論理的に理解し、考えるように進めていく。すなわち、根拠を明確に立証するということになって論証（証明）という概念が生まれてくる。具体的場面から数学的事象を発見し、その性質を論理的に導き、証明していくことが求められる。その上で、高等学校では、数の組で表された座標や位置ベクトルを活用し、感覚的・抽象的な概念として図形が認識できることを学ぶ。

各校種の共通点を考えていくと、具体物を扱う操作（具体物操作）と頭の中で想像する操作（念頭操作）の操作活動がある。学年が上がるとともに、具体物操作から抽象度が上がり、少しずつ念頭操作になっていくが、双方の活動が授業の中で展開されている。そして、その操作活動の中で、自分の考えを整理し、他者に伝えるために、言語が必要になってくる。そこで、算数・数学部では、次のページのようなマトリクスにまとめた。

コミュニケーション / 単元	言語的コミュニケーション		非言語的コミュニケーション
	日常言語	数学的言語	操作・体験活動
角柱と円柱	見取図や展開図の辺のつながりや面の向きなどについて、説明する。	見取図や展開図の辺のつながりや面の向きなどについて既習事項や構成要素などを用いて表現する。	・展開図が正しいかどうかを具体物操作で確認する。 ・１つの展開図から他の展開図ができることができるかを頭で考える。
立体の等積変形	立体の変形の過程について言葉をつかって論理的に説明する。	既習事項の展開図、見取図などを用いて表現する。	説明の根拠となる立体模型をつくる。
回転体の体積	球を平面で切り取った立体の特徴を説明する。	回転体の体積を積分の式で表現する。	球を平面で分割した立体の体積を多項式の展開と方べきの定理を用いて予想する。

まず、算数数学科でとらえたコミュニケーションとは、課題と向き合う場面における自己とのコミュニケーションと課題を解決する場面おける他者とのコミュニケーションがある。これらを言語的コミュニケーションと非言語コミュニケーションに分類した。さらに細かく言語的コミュニケーションを日常言語と数学的言語に分類した。非言語的コミュニケーションを操作・体験活動とした。まず、数学的言語であるが、式やグラフや図などの数学的表現を用いて、自分の考えをしっかりと表現すること、その考えを他者に伝えることが重要になってくる。また、それらの自己とのコミュニケーション、他者とのコミュニケーションだけでなく、他者の各種表現をよみとることも含まれている。しかし、この数学的言語では、だれにでも誤解なく伝えることができ、抽象的なものである反面、洗練された表現であるため、相手へ伝えることが難しいこともある。もう一方は、日常言語であるが、自分の考えを伝えたり、よみとったりする中で、数学的言語だけでなく、日常言語を付けたし、補いながら、表現していく。このコミュニケーションでは、具体的でイメージしやすいが、時にはあいまいで人に伝わりにくいこともある。

非言語的の部分であるが、授業の中での、上記のような操作活動や算数的活動や数学的活動によって、言語を介さなくても、考えをに補完しながら授業が進んでいき、児童生徒の理解や考えが深まっていくことをねらっている。校種によって、指導法や指導形態が異なるが、単元だけでなく、このマトリクスにおいても小中高連携をより密にしていこうと考えている。

(3)図形の見方を深めるために

図形の見方を深めるために、具体物を操作したり、頭の中でイメージしたりして、考察したことを、既習事項の数学的表現を用いて、筋道立てて、説明し合う活動を行っていく。そのことで、図形に対する理解がより深まり、図形に対する見方がふかまるととらえている。そのために、各発達段階や小中高のつながりを考えて、次のような具体的な手立てで授業を進めていくことにした。

小学校においては、展開図や見取り図を用いて課題を解決していく。その活動の中で、具体物操作と念頭操作とを行き来しながら、授業を展開していこうと考えている。中学校においては、授業の導入では、具体物操作から入っていくが、課題を解決する中で、図形を変形し、その共通点が見えてくるはずである。その根拠について数学的表現を用いて、論理的に説明し合う授業になる。高校においては、念頭操作活動から導入し、予想したことを各種数学的表現で考察していく。また、

２．実践事例１　数学的な見方や考え方の良さを実感する授業づくり
～空間図形「正多面体」～（１年）

(1)　はじめに

生徒が意欲的に取り組めて，“わかった”と実感できる授業にしていくためには，教師の丁寧な説明も大切であるが，「授業」を，生徒たちが自ら意欲的に考え，課題解決の過程を通して目標とする概念や法則・定理といったものを獲得していくよう仕組んでいくことができれば理想的である。例えば以下のような条件を満たす題材を設定したときに，そのような状況が多くみられるのではないかと思う。

１）解決すべき課題(目的)がはっきりしている

２)具体的な事象(データ等も含む)をじっくり観察し分析(違う部分と共通する部分の整理)する場面がある。

３）数学的な法則や性質の発見が，生徒たちにとって難しすぎず，また簡単すぎない。

４）発見した法則や性質を使うことが課題解決に有効に働く

もちろんこれがすべてではないが，授業を組み立てていく上での１つの目安にはなるのではないかと考えている。

(2)授業のねらいと題材設定の理由

中学校第１学年においては，小学校の学習を基礎として，図形に対する直観的な見方や考え方を含め，論理的な考察の基礎を養う段階である。この授業では，考察や操作活動を中心に，直観的な考察を行い，厳密とはいえないまでも既習事項を使って結論の根拠を説明するようにしたいと考えている。正多面体の魅力は，形の美しさと同時に，数学的にも美しい性質や理論が隠されているところにある。そしてそれは中学1年生でも「難しそうだが，自分の力で何とか説明できそうだ」といったちょうどよい程度の性質や法則であると考える。その上そのような法則や性質は，正多面体の「見た目の美しさ」を支えているともいえる。つまり，正多面体の追究は生徒たちに「数学の美しさ」を実感させるには非常に良い題材である。

(3)　目標

・正多面体とそうでない多面体を比較することを通して、正多面体の一般的な特徴を見出し、それを言葉に表すことができる。

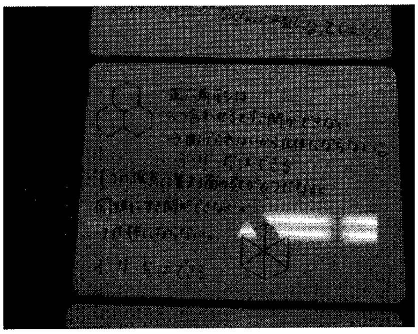
・正多面体が５種類しかないことを知り、その理由を既習事項を使って説明できる。

(4)　授業の実際

①　導入　「正多面体とは」

正多角形の定義から正多面体の定義を類推させ，いくつかの立体模型をみせながら、中には反例もおりまぜながら，問答をしながら授業を進めていく。その中で、生徒自身が、正多面体の定義付けをおこなっていく。

② 展開 「なぜ正多面体は５種類なのか」



合同な正多角形のチップを使って正多面体がつくれるか確かめていくようにする。その際，各正多面体の面の形や１つの頂点に集まる面の数に着目するようにし，「正六面体だけではなぜ多面体がつくれないのか」ということを手がかりに，「正多面体が５種類しかない理由」を考えるようにする。

③ まとめ

グループごとに考えを交流しあう。その中で新たな発見や気づきが生まれる。

この学習において,「何となくこうではないか」ということは分かるが,「はっきり言い表せない」という類のもの，つまり他者の意見を聞いたら「目からウロコ！」的なものが多い。そこで，学習形態として小集団での話し合いや討議の場面も取り入れ，気軽に気付いたことを出し合える環境を通して，個々の学習の深まりを期待したいと考えている。

◆生徒のワークシート

◆ なぜだろう．

自分の考えや班のメンバーの考えをかいてみよう

1つのところに集まる面は3つ以上でないといけない

六角形以上の正多面体は、（もしくは重なってしまう，

1つのところに3つ以上集まると平面になってしまうので、正多面体が出来るのは

・正三角形・正方形・正五角形の3つ

このうつの正多角形で出来る正多面体は5つ ⇒ 正多面体は5つしか出来ない

《自己評価してみよう》

	いいえ　　はい
1．積極的に話し合いに参加しましたか。	1－2－3－4－5
2．正多面体の特徴が理解できましたか。	1－2－3－4－5

《発見したこと、知ってうれしかったこと》

「なぜ正多面体は5つしかないのか」というのを考えたとき、色々な班から違う答えが出ていて発見があっておもしろかった。

◆ なぜだろう．

自分の考えや班のメンバーの考えをかいてみよう

正四面体 △ 60
正六面体 □ 90
正八面体 △ 60
正十二面体 ⬠ 108
正二十面体 △ 60

面を正六角形にすると… ⬡ 120×3＝360!?

1つの頂点に集まる面の内角は，360°になると平面になってしまうので，立体にはできない。

頂点ができるには
・面は3枚必要
・角の合計は360°より小さい

《自己評価してみよう》

	いいえ　　はい
1．積極的に話し合いに参加しましたか。	1－2－3－4－5
2．正多面体の特徴が理解できましたか。	1－2－3－4－5

《発見したこと、知ってうれしかったこと》

正多面体が5つだということは知っていても，なぜ5つかと聞かれると分からなかったので，班での話し合いで発見して分かり，理解できたのでうれしかったです。

3．実践実例２　「立体の等積変形」（３年）

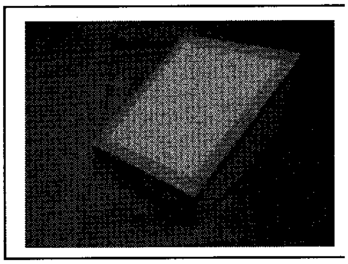
（１）はじめに

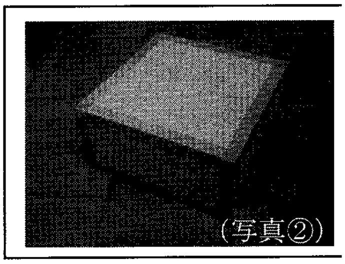
第二学年では平面での等積変形を学習している。立体でも等積変形ができるのではないか。本題材は、そのことを確認するために具体操作として模型を作る。そのために、立体を様々な角度から観察し、展開図をかいたり、切断し切断面を考えたりする。生徒たちは体積が等しくなるということはすぐに理解できるであろうが、実際にどのような変形が行われるかはあまり考えていない内容であると思われる。その変形を考えることにおいて思考力を高め、そして自己理解だけではなく他者へ伝える方法として立体において展開図、見取り図が有効であることに気づかせたい。

（２）目標

等積変形を表す立体模型をつくるための展開図や見取り図を考えることによって、図形についての見方を深め、表現する力を養う。

（３）授業の実際





（写真②）

①導入「立体①をどのように変形すれば立体②になるのか」

実際に（写真①）（写真②）の模型を２つ見せ体積が等しいことを伝える。体積が等しいということより、立体を切り貼りすることで変形することができる言わば「立体の等積変形」ができるのではと考える。切り貼りはできるだけシンプルにという点から、生徒たちは１回の切断でできることにいきつくのは容易である。２つの立体の上面の対角線の交点は一致することから、その点を通る平面で切断すればよいことに気づく。

②展開「実際に切り貼りして変形できるかを立証しよう」

全体で対角線の交点を通る面で切断することを確認し、班で①を切断した立体２つをつなぎあわせば②になるのかということを立証する。ここで生徒が使うのは既習の見取図、展開図である。切断した面を見取図に書き表すことは生徒にとって非常に難しいが、班の中で考えることにより正確な見取図をかくことができていた。立体の合同を示すにあたって、「各面が合同であれば合同になるのでは？」「展開図が同じならば合同になるのでは？」という方向性を見出した。実は立体はそのままでははまらず、すべての面を反転する必要性がある。見取図、展開図からはそこに気づかない班も、次の時間に実際模型を作製することにより気づくこととなる。

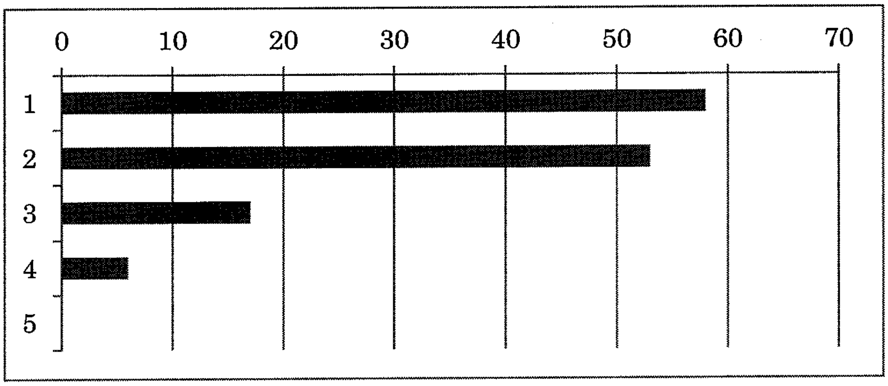
③発表

班の考え方を発表し、必要に応じて質問や矛盾点の指摘を行いながら、それぞれの考えを高めていく。

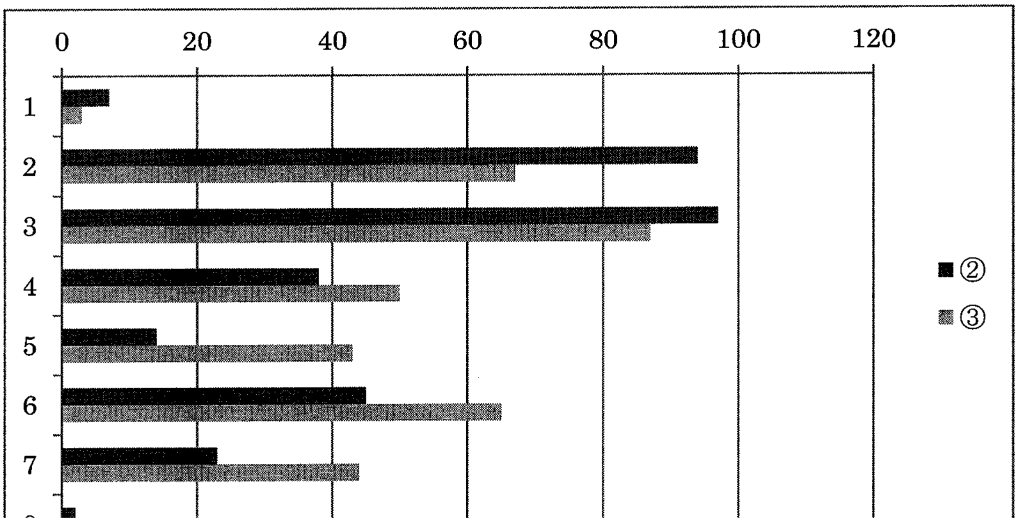
（4）生徒アンケート、感想、レポート、作品

≪アンケート≫

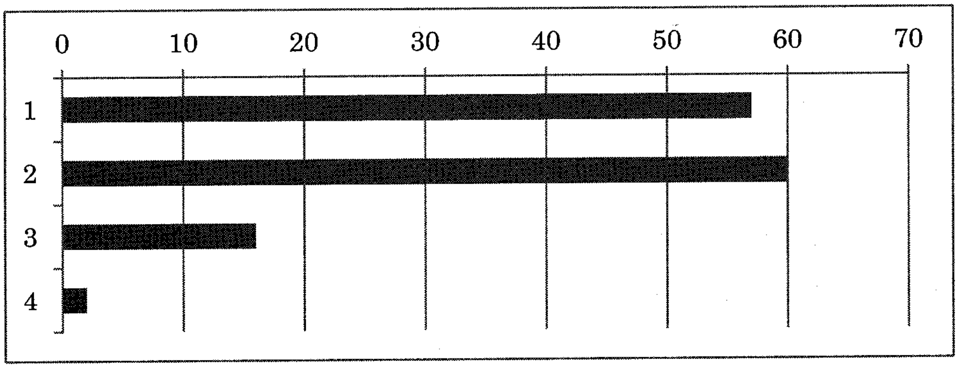
①問題の難易度は？（1つ）
1. 難しい　2. やや難しい　3. ちょうどいい　4. やや易しい　5. やさしい



②個人で考えることができたのはどれですか。（あてはまるものすべて）
③班で考えてできたのはどれですか。（あてはまるものすべて）
1. 全くできなかった
2. 切断する面を頭ではイメージできた
3. 切断する面を見取図に表すことができた
4. 切断した立体がはまることを説明できた
5. 切断した立体がはまることを証明できた
6. 切断した立体がそのままはまらないことに気付いた
7. 切断した立体がそのままはまらないことに気付き、はまる方法を考え出せた
8. その他（　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　）



④班で考えたときに友だちに説明する際に、見取図が有効であると思いましたか。
1. たいへん思った　2. 少し思った　3. あまり思わなかった　4. 全く思わなかった

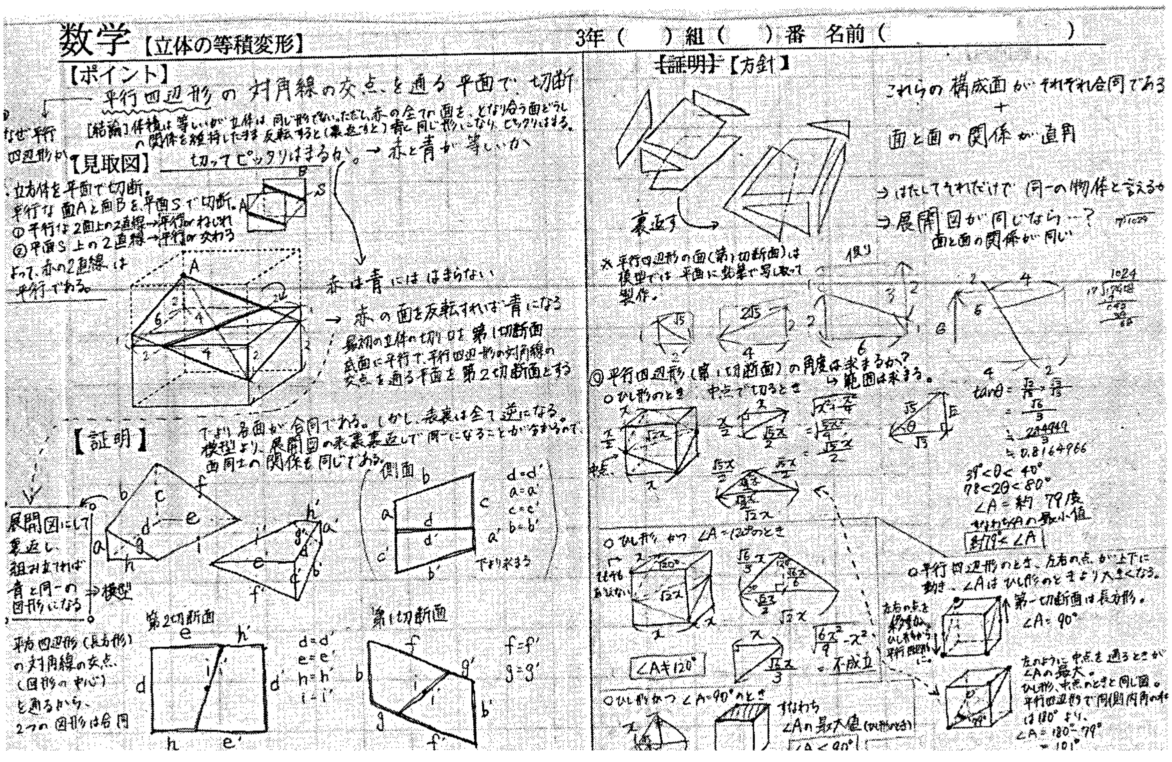


≪感想≫

- 証明の展開図の役割を分担したので、展開図のことはあまりわからなかったのですが、班で証明することができ、難しかったけどよく理解できました。
- 見取図を書いて考えてみると図形の形や特徴が分かりやすくなって、説明しやすく感じました。この授業は難しかったですが、等積変形までの筋道が見えてよかった。
- 言葉ではなかなか説明をしても伝わらなかったが見取図に表せたら伝わった。説明をすることはできなかったが友だちにきいて、納得できました。

≪レポート≫

その１

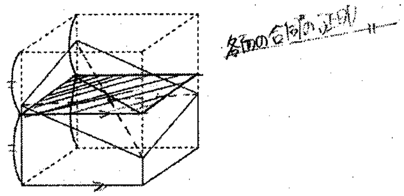


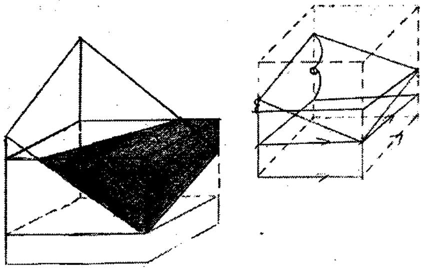
その２

数学【立体の等積変形】　3年（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　）

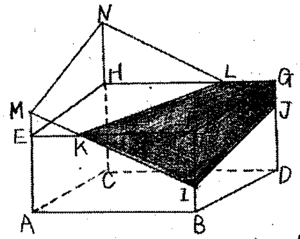
【ポイント】
平行四辺形の対角線の交点を通る平面で切断

【見取図】





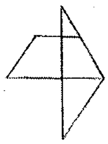
【証明】



立体MEK-NHLを切りとって
立体JGL-IFKの位置に
はめようとしたが、
体積は同じだったが
形が違ったためあてはまらなかった

なので その次に ① 立体MEK-NHLと立体JGL-IFKの全ての面が合同であることを証明する。

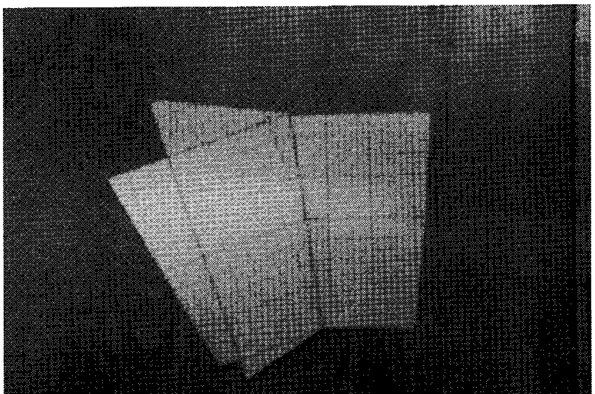
四角形EKLH≡四角形GJKF
四角形EHNM≡四角形GFIJ
△MEK≡△JGL
△NHL≡△IFK
四角形MNLK≡四角形JIKL

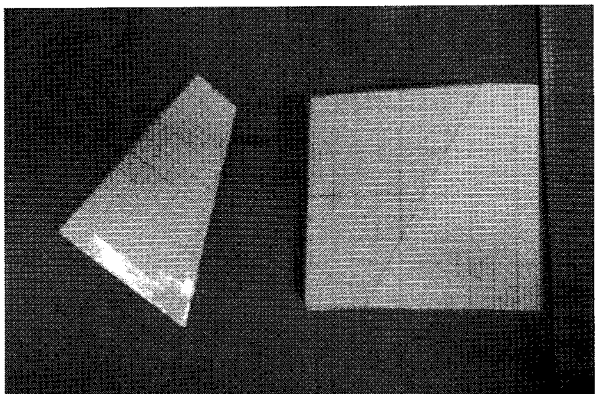


② ①より 立体MEK-NHLと立体JGL-IFKの展開図は同じ

③ 体積も展開図も同じなので 2つの立体は同じ体積・同じ形になり 立体MEK-MHLは立体JGL-IFKにあてはめることができる

≪作品≫





４．実践を終えて～成果と課題

言語活動のなかの日常言語は話し合いの中で有効なものという意識なく自然につかっている。一方で、非日常言語に関しては説明の上で有効なものと比較的感じられていなかったものが、この授業を通じてアンケート結果から有効な手段であるということがある一定浸透したものと考えられる。

今後の課題としては、日常言語と非日常言語を生徒自ら必要なときに利用しながら課題に取り組むなかで思考力がいかに伸びていってるかということを検証する方法を考え、検証する必要があると考えられる。