

数学的な思考力を育む授業の創造

～言語活動を効果的に行うための学習課題の開発～

数学科 山戸正啓・谷 直樹・松井悠歌

1. 主題設定の理由

(1) 「思考力」にこだわる理由

今回の指導要領では、思考力・判断力・表現力が強調されている。評価の観点も、その第2観点が「思考・判断」から「思考・判断・表現」へと変わった。いわゆる「見えない学力」を見える形にするのが表現である。が一方で、表現は深い思考なくしては成り立たないことも見えてきたからである。(言語が中心となると思うが)表現技能一技能の中でも、きわめて基礎的なものを身に付けていても実際他者を納得させる、あるいは感嘆させる表現を行うためには、深く密な思考を必要とすることは想像に難くないわけである。

ようするにこの3つの学力は、一体のものと考えその伸長を図らなければならないのではないかと思う。とはいえ数学の学習では、論理的思考(抽象概念を頭の中で動かす活動)が中心であり、「考える力(思考力)」を伸ばすことが第一の目標である。したがって表現する活動(思考内容を表出する)も思考力を土台として行われるわけであり、表現することを通して思考力をより確かなものにしていくことになる。このことは、判断力についても同様と考えられる。だから、本校数学科としてはあえて「思考力」にこだわって主題を設定したわけである。

(2) 「思考力」と言語活動

数、式、記号、グラフなど数学特有の表現手段は、単純かつ理想的(不要な要素を取り払っているという意味で)言語ということができる。通常の言語とは違い、論理的な操作が容易で、推論の過程を簡潔かつ正確に伝えることができるこれらの(数学的な)言語は、表現手段としてだけではなく人間の論理的思考を促進する上で大きな効力を発揮すると考えられる。

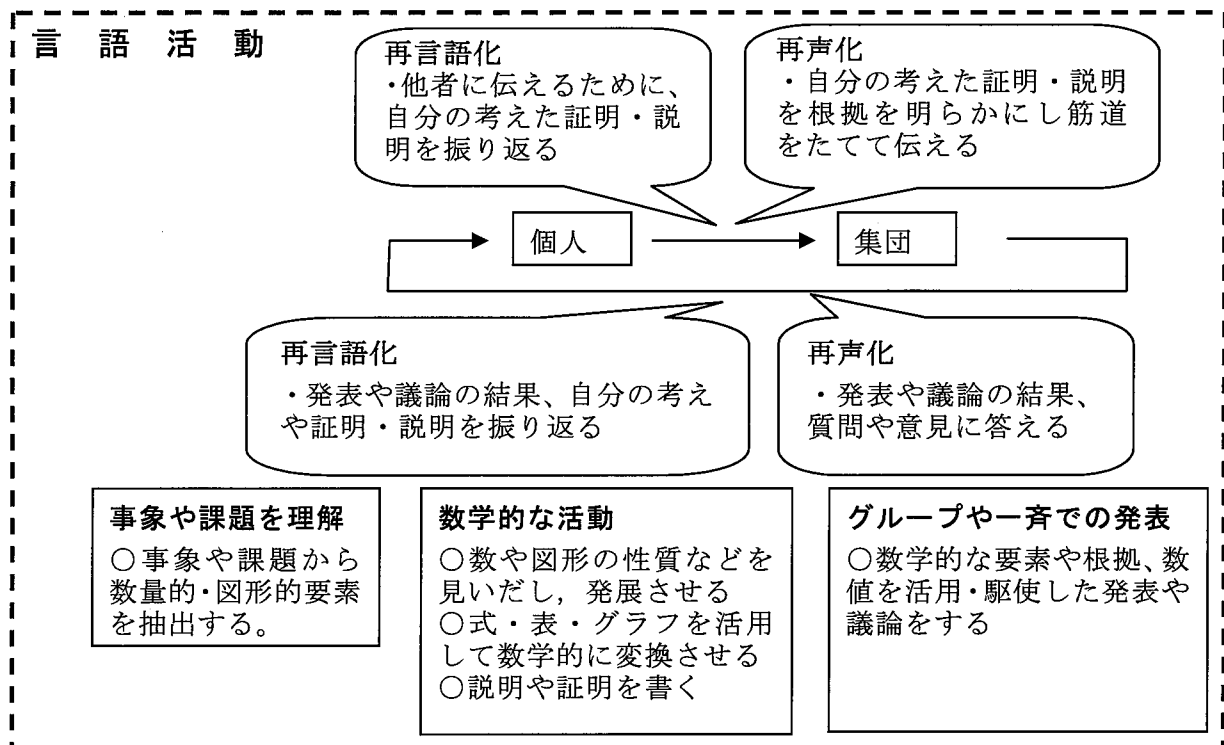
たとえば、現実的な課題を数学的な知識技能を活用して問題解決する数学的な活動をおこなう場合、次のような解決過程が予想される。

- ①通常言語で表された課題から、数量的または図形的要素を抽出。
- ②その関係を記号や式、表やグラフなどを活用して数学的に変換。
- ③数学的(形式的)な操作や考察
- ④上記操作や考察で得た数学的結論を通常言語を活用し課題に対する解答(この場合の解答とは、結果だけでなくそのプロセスや根拠の説明を含んだもの)として表出。

これら①→④の流れは、問題解決をより論理的にかつ簡便におこなうための基

本となる思考過程であり、これに精通することは、情報処理をより速く正確におこなう能力（論理的思考力）の伸長につながるものといえる。特に④の段階で、説明をするために自らの思考の過程を文書化・再言語化したり音声化・再声化したりすることによって、それがより一層整理された記憶として自身の中に残されていくのである。

ようするに、通常の言語で表現された事柄を数学的言語に置き換えたり、それを操作して問題解決したりすることによって論理的な思考力は飛躍的に伸長されると考えられる。その際、学習の効果をより高めるのが話し合いや、発表、レポートなどの言語活動なのである。



▲数学科の考える言語活動の構造図

2. 本年度の取り組み～言語活動を効果的に行うための学習課題の開発

言語活動を活性化させるためには、本気で言いたくなる（説明したくなる）言わなければならない（納得させなければならない）そんな場面を作ることが、大切である。またそのような場面を作るためには、生徒たちがそれを必要とする優れた学習課題を提示しなければならないと思う。

本年度はそのような課題の中から、「現実的な事柄を解決する課題」と「ぼんやりした課題」を生徒に提示し課題学習作りに取り組んでいる。

（1）現実的な事柄を解決する課題

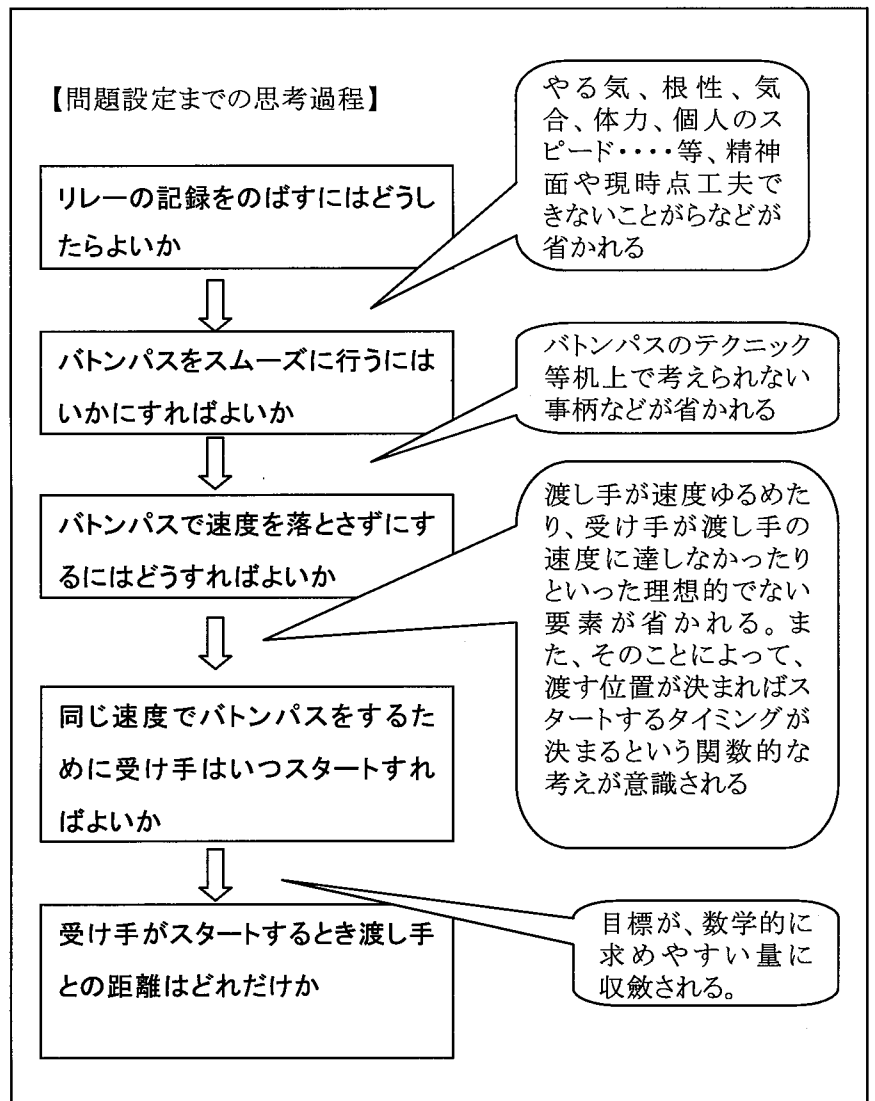
自然現象や社会現象等、本当の意味で現実の問題を中学生程度の数学の知識・技能で解決（それなりの解を求める）することは、おそらく困難（不可能）と思われる。だから、私たちの問題意識は、生徒たちが普段数学とはまったく世界が

違ふと感じている（その意識が染み付いている）事柄が実は、見ようによっては—しっかりと分析する力があれば—学んだ数学的（抽象的な）理論を活用して、よりよい結論（人々が利用できる）を得ることができるという実感と、それに向けての基礎的な考え方を育ててやりたいということである。

現実的な事柄は、現実的・具体的であるだけ色々な情報を含んでいる。数学を使うためには、それと（数学と）関係ない要素や不要な要素を排除しなければならないし、必要な要素を数値化したり、式化したり、関係を整理する・・・など「数学化」していかなければならない。

ところが、日々の授業を振り返ったとき、そのような能力を鍛える学習をしていないことに気付く。「〇〇くんがA町を毎分 Δm の速さで出発してB地点に立ち寄り・・・C町に、 $\times\times$ 分かかって到着した。云々。」極論すれば既に数学化された問題を提示し、学習した法則（ほとんどが公式）に当てはめる「訓練」を行うばかりになっているのではないかと思う。もちろんそれはすこぶる有効であり、問題の難易度をあげていくことで数学的に「考える力（思考力）」のが鍛えられていくことは間違いのないのである。でも、ここで鍛えられる力は、生きて働く「思考力」としてきわめて基礎的で不十分なものであると思う。

以前、学力調査で平行四辺形の面積を問う問題はほぼ全員が正解を得たのに対して、同じような形をした公園の広さを求める問題になると突然正答率が落ちる、といったことが話題になった。子どもたちにとって、学校で学ぶ算数・数学の世界と外（日常現実）の世界とが完全に乖離しているのである。折角授業で鍛えた「考える力」がこれでは「絵に描いたもち」なのである。つまり、外の課題を数学化していく能力—現実的な課題を数学の問題に変換する力を鍛えておかなければ、生きて働く数学的思考力とはならないと考えられる。



そこで、本年度は現実的な事柄について、解決したいことを提示し取り組む過程で、徐々にそれを数学的な問題へ変換していく状況をつくりだす課題学習を授業に載せている。前頁に示した図は、今回行う授業で課題を絞り込んでいく「予想される思考過程（生徒の）」であるが、最初は「記録を伸ばす方法」というまったく数学とは無縁のような目的から「受け手のスタート時の渡し手との距離」という数値を求める問題へと情報のそぎ落とし（数学化）が行われている。このあと、受け手と渡しての位置の変化や解決のために必要とされるデータの精選およびその測定方法等、数学を使うための情報の解釈（数学化）が行われることになる。これら一連の作業は、先の述べた日常の授業で現れる文章題では使うことのない思考回路をフルに稼働させなければならないわけである。

そして、その際「わいわいがやがや」と気兼ねなく思いついたことを出し合う「話し合い」（言語活動）が有効であり、また自然と話し合いが起こりやすく活発化しやすいと考えている。

（２）「ぼんやりした」課題

まさに「ぼんやり」とした表現になってしまった。「ゴルフフリー」とか「オープンエンド」なんて世間でつかわれる言い方でいいのかもしれないが、私たちの印象として「ぼんやり」が浮かんだのである。

今回の授業で行う課題は、結論があるのだろうとは思われるが、現在の自分の（中学生の）知識では確証は持てないし、その前提となることがらも与えられていない。自分で、「前提」も「考える視点」も「論理の筋」も・・・もちろん「結論」も（その立証も）作っていかなければならない。きっと正しい結論はある。理想的な説明（立証）の仕方もある。最も優れた問題の立て方もある。でも、現段階ではみんな（クラスの仲間も先生も）それを知っていないし分からない。だから自分の考え方を信じて考察を進め、自分で検証し、ぶつければ（他者に示す）よい。

そんな輪郭のはっきりしない課題なのである。

このような課題もまた、それに取り組む過程で普段あまり使わない思考回路を使うことになる。自分でゴールを定めること、自分なりの視点をもつことそしてそれらを立証の可否を予想しながら修正することなど、直線的な思考を通常とする普段の学習活動とは違った考察となるのである。だが、彼らがこれから社会で問題解決していく（学問的な研究を進める上でも）ときに必ず行われる筋道であり、鍛えておかなければならない「思考力」である。

そしてこれもまた、言語活動が有効であるし、自然と誘発されるものであると考えている。

(3) 言語活動の特徴を意識した授業計画

一口に言語活動といっても、少人数で行う自由な「話し合い」やしっかりした論述を応酬しあう「討論」、ひとまとまりの研究成果を説明する「発表」、書き言葉による「論文・レポート」等様々である。もちろんそれぞれに学習効果があり、授業の段階や、ねらい、場面によって使い分けることが必要となる。

今回の取り組みでは、わいわいがやがやの「話し合い」→丁々発止の「討論」→立て板に水「発表（プレゼン）」の流れを意識して授業計画を考えている。「話し合い」は授業の前半に、各人の発想を出し合い、交流し、まとめていくなど考察を深めていくことを、「討論」では自らつくった論をぶつけ合い、批判と反批判の中で研ぎ澄ましていくことを、そして「発表」では聞き手を意識してわかりやすく簡潔に、納得をめざす「考えのまとめ」をそれぞれねらいとして行っている。

特に、これまで言語活動としてはあまり注目されていなかった少人数での「自由な話し合い」に重点を置きたいと思っている。「あれ」「それ」といった指示語や曖昧な表現、述語抜きの言い回しなど、言語力・言語技能という観点からは効果的でないと思われる活動である。

ところが、数学的思考の活性化ということになるとこれがなかなか有効なのである。私たちが授業をやっていて、「いける！」と感じるのは、この「わいわいがやがや」が熱をおびた時である。曖昧な表現や言葉であるが身振り手振り、図などを使いながら必死に説明しようとする生徒と、それを真剣に理解しながら自分の意見を差し挟もうとする生徒、彼らが入れ替わり立ち替わり話し手と聞き手に変わっていく。グループのメンバー全員が主体者になって「言う」状況。最後には一つの考えに到達し、喜ぶ声が聞こえてくる。どこのグループでの同じ事が起こり、全員が授業に引き込まれている。そして考えているのである。

曖昧な言葉・表現であるが、生徒たちは「はなしている」のである。「あれ」や「それ」に普通名詞を代入すれば、述語を後で足せば・・・論理的な表現にすぐ変わるのである。だから、概念が徐々に明確にしていけるし、論が立っていく。この段階を経ずして、整った（しっかりした）表現を用いる討論や発表の仕方を指示して活動したところで中身の無い「お上手な」討論会になるだけではないだろうか。「仏作って魂入れず！」

そこで、本年度は「話し合い」が生まれやすい学習課題の開発と授業での手だての工夫について取り組んでいるところである。

3. 実践事例1 「対角線で四角形を分類してみよう」（3年）

(1) はじめに

第2学年では四角形を辺の平行や長さ、角の大きさを考え、一般の四角形から特別な四角形を系統立てて分類している。その分類だけではなく、他も考えられるのではないだろうか。本題材は、対角線という違った視点から四角形の性質を

問い直していくことを通して、図形はある視点をもって分類することができ、どんな視点で考えたかによって分類の仕方が変わってくるということを感じとらせることができる題材である。

対角線をいろいろに組み合わせることによって違った四角形ができる。どのように対角線を組み合わせれば、どのような四角形になるかを演繹的に図形の性質を確かめていく学習にもつながる。また、生徒にとって既習のことゆえ、見通しを持ちやすく、取り組みやすい題材でもあるともいえよう。つくった図形になることを、根拠を明確にして筋道を立て説明することや数学的な力を使って四角形を分類することで、思考力・判断力・表現力が養われると考える。

(2) 目標

対角線の長さや交わり方を視点に四角形を分類することを通して、図形についての見方を深めるとともに、それによって見いだした四角形の性質を、既習事項を活用して確かめ、論理的に考察し表現する能力を養う。

(3) 授業の実際

① 2本のストローで四角形をつくろう (1時間)

2本のストローを交わせ、イメージできる四角形の性質を考え、交わり方を根拠に証明する。長方形、平行四辺形、ひし形等対角線の性質が既知であるものについては、すぐに立証できるが、台形やたこ形など既習事項にないものは少し困難である。

② 対角線で四角形を分類しよう

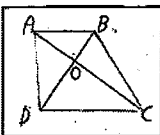
(1時間)

前時の学習を踏まえ、「辺や内角ではなく対角線で全ての四角形を分類できるのではないか」という想定のもと、グループ(3人)ごとに視点を明らかにしながら分類していく。その際、分類図と根拠や説明を書いたワークシートを作成する。

① つくった四角形やその特徴

四角形の名称: 台形
その特徴
向かい合う1組の辺が平行である

つくった四角形の図



② 対角線の条件

$$AO:OC = BO:OD$$

③ ①, ②を使って、つくった四角形の証明

$\triangle ABO$ と $\triangle CDO$ に注目
 仮定より $AO:OC = BO:OD$
 対頂角より $\angle AOB = \angle COD$
 2組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しいので
 $\triangle ABO \sim \triangle CDO$
 対応する角は等しいので
 $\angle ABO = \angle CDO$
 錯角にあたるから $AB \parallel DC$
 向かい合う1組の辺が平行であるので
 四角形 $ABCD$ は台形

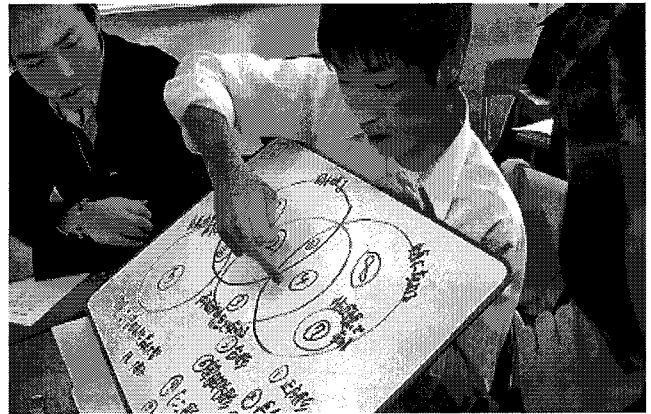
▲ 台形になる条件の証明



▲ 分類の構想を練る

③発表しよう（1時間）

他の班に、発表し質疑応答を行いながらそれぞれの考えを高めていく。



④レポートにまとめよう（1時間）

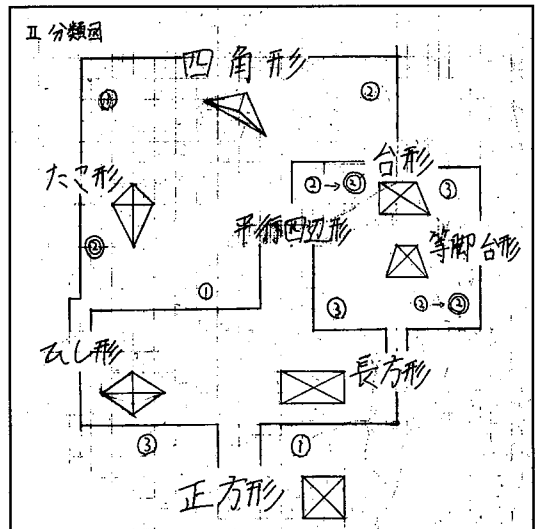
最後に、前時の討議で修正されたことも含め、課題追求の経緯やグループの問題意識、視点、分類図とその説明、感想などを記載したレポートを作成し一連の授業の収束点とする。

I はじめに

私達は分類図を書く際、対角線の条件をパーツわけしました。

- ・ 対角線がそれぞれを同じ比で分ける点で交わる
- ・ 対角線が垂直に交わる
- ・ 対角線がそれぞれ中点で交わる
- ・ 対角線の長さが等しい

一度ベン図にしてみたのですが空欄のないものができず、今の図に落ち着きました。



III 分類図の説明

図中の番号について説明してきたいと思います。

- ① 対角線が垂直に交わる
- ② 対角線がそれぞれ同じ比で分けられる点で交わる
- ③ 対角線がそれぞれ中点で交わる
- ④ 対角線の長さが等しくなる

これらの条件を加えていって図形を作っていく最終的にどの道を通っても行き着くようにしました

IV 課題

他の班の意見を聞いて「たこ形」は2タイプのものがあるということが分かりました。自分達は「たこ形」は最初から1つのタイプしかないという先入観にとらわれてしまい見つけることができませんでした。

(4) 生徒の感想

- ・対角線に着眼点を置いて学習した事で、より図形の定義や性質について深まった。
- ・自分で考えたとき、班で考えたとき、違う班から質問を受けたときと少しずつ内容が深まっていった。
- ・他班の「たこ形を分けて分類する」という考え方は全く思いつかなかったなので、新鮮さを感じた。
- ・対角線の条件を記号でしか用いられなかったが、発表では言葉に変えて説明できた。
- ・凹四角形が話の中で出てきたが自分だけでは思いつかない。発表会をしたかいたがあった。
- ・対角線で四角形を分類するっていう視点自体、新鮮で楽しかった。
- ・凹四角形についてかなり話し合っ、広い視点で対角線についてかんがえることができた。
- ・台形やたこ形などはお互いの共通点と相違点を持っていて図を描くのにとっても苦労したが、6人（相手グループと共に）考えて、図を改良してまとめることができました。
- ・3人で結構議論してまとめたつもりであったが、発表して色々指摘されたことは自分たちの考えてもいなかったことで、新たな発見になった。
- ・相手の矛盾を探することで自分たちの班の考えを考え直すことができた。

4. 実践事例2「陸上競技と数学～マークポイントを見つけよう！」

(1) はじめに

今回はリレーを題材として採用する。陸上競技は、学校行事や体育の授業などでも触れる機会が多く、日常生活において馴染み深い話題である。その為、生徒自身が創意工夫してマークポイントの位置を考え、意欲的な追究活動ができると考えられる。

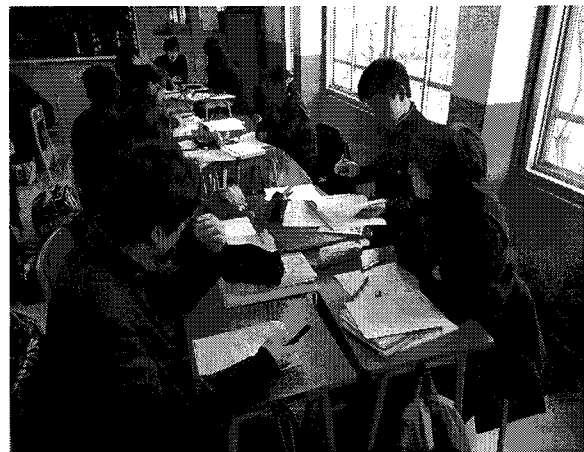
生徒一人ひとりが個人の100mのタイム・移動距離から、関数の知識を用いてリレー競技のマークポイントの位置を考える。身近な話題の中でも数学を用いて考えることが出来ることに気付き、日常生活の中で、数学を用いて考えようとする姿勢を育てたい。

(2) 目標

関数の知識を用いてマークポイントの位置を考えることに関心を持ち、意欲的に課題に取り組む。また、理想的なマークポイントの位置を導き出すとともにその根拠を論理的に説明する事ができる。

(3) 授業の実際

①マークポイントを見つける方法 を考えよう 1～理屈を考えよう…1時間目

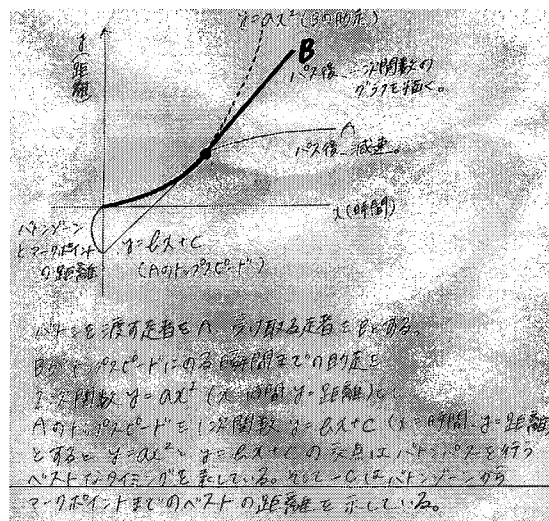


▲グループ活動の様子

「リレーの記録をのばすためには？」という現実的な問いを出発点に、先生やグループ（4人）のメンバーと話し合いながら「受け手がスタートするときのもっとも良い渡し手との距離（マークポイント）を求める」という数学が使える問いを導き出し、その方法に関数の知識など既習事項を活用してグループで考察していく。

②マークポイントを見つける方法を考えよう 2～計画を立てよう… 2時間目

前時で考えた方法を活用するために、どのようなデータが必要かそのためどのようにしてそのデータを測定すればよいかなどを含め追求計画を立てる。短距離走の加速という非常に短い時間での変化であるため、机上の論理ではデータは取れない。使う道具や測り方、数値化の方法等かなり工夫が要る。



▲マークポイントの位置を導き出そう！

③データを集めよう（測定しよう）… 時間外
前時の計画をもとに測定を行う。

④理論に基づいてマークポイントをもとめよう… 3時間目

取り出してデータを使って、理論に当てはめマークポイントを推定する。また自分達の考え方や追求の経緯について発表できるようレジュメを作成する。



▲測定の様子

⑤発表しよう… 4時間目

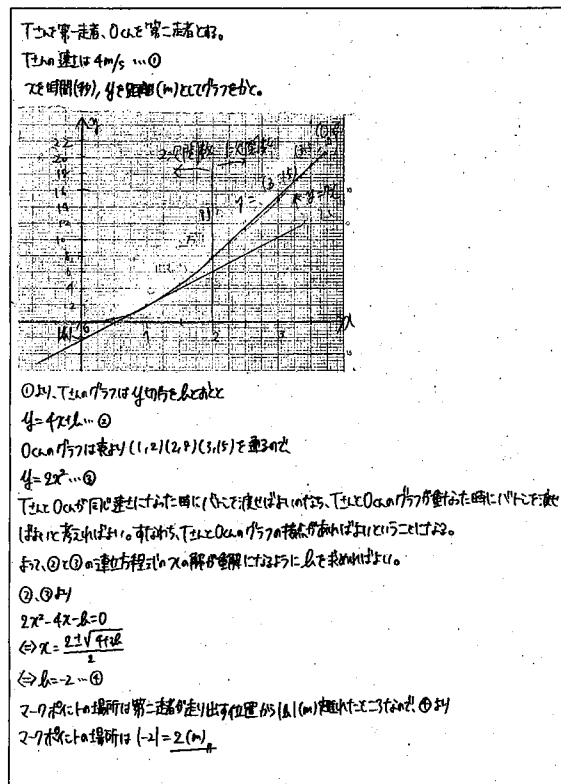
グループごとにそれぞれの結論と考え方を発表し交流しあう。

(4) 生徒の感想

- ・陸上競技のようなスポーツに関しても数学の考え方に効果があることに驚いた。数学は様々な場面で活躍する。凄いと思った。
- ・走り出す位置は目分量だと教えられてきました。走り出す位置が数学で求められることを知って驚きました。
- ・実際に計ったデータを式にすると、分数・小数が細かく出てきて計算するのがものすごく大変だった。計算式、グラフをつくる上で、分からないことも多かったが充実した授業だった。

- ・マークポイントの位置などを考えるのはおもしろかったし、新鮮だった。

測定データをふまえて考察⇒



5. 実践を終えて～成果と課題

言語活動を効果的に行うための学習課題の開発として「現実的な事柄を解決する課題」と「ぼんやりした課題」に取り組んだが、思考力を伸ばすためにも実践を積み重ね修正していきたいと考えている。また、新たな課題の開発にも取り組んでいきたいと考えている。

今回の取り組みで自由な話し合いを踏んだ上で言語活動がより数学的な思考の活発化につながることを伺えた。そして、発表や議論、レポート作りといった言語活動をすることによって思考力がより育まれたと感じる。

しかし、これらは教師側の見取りであるため、根拠が不十分である。その検証方法の構築を考えていくことが今後の課題である。